2.1. Интеграција простих позитивних функција. У следећој дефиницији треба имати на уму конвенције о множењу у $\overline{\mathbb{R}}$.

Дефиниција 4.4. *Ако је $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ стандардна репрезенрација позитивне просте функције s на X, $A \subset X$ мерљив скуп, тада дефинишемо* **интеграл функције** s **по скупу** A *формулом*

$$\int_A s\,d\mu = \int_A s(x)d\mu(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A \cap E_k). \tag{4.8}$$

Из дискусије о стандардној репрезентацији простих функција знамо да су скупови E_k мерљиви, а ради доказа коректности дефиниције (4.8), тј. да она не зависи од репрезентације (4.5), посматрајмо произвољну другу стандардну репрезентацију $s = \sum_{l=1}^{m} d_l \chi_{F_l}$. На основу (4.6) је $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(c_k - d_l)\chi_{E_k \cap F_l} = s - s = 0$, одакле закључујемо да је $c_k - d_l = (s-s)(x) = 0$ за било које $x \in E_k \cap F_l$, кад год су индекси k и l такви да је $E_k \cap F_l \neq \emptyset$. У преосталим случајевима је $\mu(A \cap E_k \cap F_l) = \mu(\emptyset) = 0$, па је

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A \cap E_k) - \sum_{l=1}^{m} d_l \mu(A \cap F_l) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l=1}^{m} \mu(A \cap E_k \cap F_l) - \sum_{l=1}^{m} d_l \sum_{k=1}^{n} \mu(A \cap E_k \cap F_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(c_k - d_l)\mu(A \cap E_k \cap F_l) = 0,$$

чиме је коректност дефиниције (4.8) доказана.

Примећујемо да интеграл позитивне просте функције припада одсечку $[0, +\infty]$. Такође, ако је $\mu(A) = 0$, онда је $\mu(A \cap E_k) = 0$ за свако $k = 1, \cdots, n$, па је $\int_A s\,d\mu = 0$.

Став 4.10. ***Ако су s и t просте позитивне функције на X, онда је за сваки мерљив скуп $A \subset X$ и свако $c \in [0, +\infty)$:***

$$\int_A (s+t)\,d\mu = \int_A s\,d\mu + \int_A t\,d\mu \qquad \text{и} \qquad \int_A cs\,d\mu = c\int_A s\,d\mu.$$

△ Ако су $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ и $t = \sum_{l=1}^{m} d_l \chi_{F_l}$ стандардне репрезентације функција s и t, тада је према (4.6) $s+t = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(c_k + d_l)\chi_{E_k \cap F_l}$ стандардна репрезентација просте позитивне функције $s+t$, па је

$$\begin{aligned}
\int_A (s+t)\,d\mu &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(c_k + d_l)\mu(A \cap E_k \cap F_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l=1}^{m} \mu(A \cap E_k \cap F_l) + \sum_{l=1}^{m} d_l \sum_{k=1}^{n} \mu(A \cap E_k \cap F_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A \cap E_k) + \sum_{l=1}^{m} d_l \mu(A \cap F_l) = \int_A s\,d\mu + \int_A t\,d\mu.
\end{aligned}$$

Из стандардне репрезентације $cs = \sum_{k=1}^{n} cc_k \chi_{E_k}$ добијамо

$$\int_A cs\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} cc_k \mu(A \cap E_k) = c\sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A \cap E_k) = c\int_A s\,d\mu.$$

□

Последица 4.11. ***Ако су s и t просте функције на X и ако је $s(x) \leq t(x)$ за свако $x \in X$, онда је $\int_A s\,d\mu \leq \int_A t d\mu$ за сваки мерљив скуп $A \subset X$.***

$\triangle$ Функција $t-s$ је проста и позитивна на основу претпоставки, па је

$$\int_A s\,d\mu \leq \int_A s\,d\mu + \int_A (t-s)\,d\mu = \int_A s+(t-s)\,d\mu = \int_A t\,d\mu. \qquad \square$$

Интеграција по мерљивом подскупу се може свести на интеграцију по читавом простору: за сваку просту позитивну функцију s и сваки мерљив скуп $A \subset X$ важи једнакост

$$\int_A s\,d\mu = \int_X s\chi_A\,d\mu = \int_X s\,d\mu_A,$$

где μ_A означава контракцију мере μ на A. Доказ, који се своди на примену дефиниције интеграла на просте позитивне функције $s = \sum_{k=1}^n c_k\chi_{E_k}$ и $s\chi_A = \sum_{k=1}^n c_k\chi_{A\cap E_k}$, препуштамо читаоцу.

Следећа лема показује како се простим позитивним функцијама могу генерисати нове мере на полазној σ алгебри.

Лема 4.12. ***Ако је s позитивна проста функција на X, онда формула $\mu_s(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A s\,d\mu$ за све $A \in \mathfrak{M}$, задаје меру μ_s на $\mathfrak{M}$.***

$\triangle$ Из претходне напомене следи да је $\mu_s(\emptyset) = 0$. Затим, нека је $A = \bigsqcup_{m=1}^\infty A_m$ за неке $A_m \in \mathfrak{M}$. Тада је

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^\infty \mu_s(A_m) &= \sum_{m=1}^\infty \int_{A_m} s\,d\mu = \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=1}^n c_k\mu(A_m\cap E_k)\\ &= \sum_{k=1}^n c_k \sum_{n=1}^\infty \mu(A_m\cap E_k) = \sum_{k=1}^n c_k\mu(A\cap E_k) = \int_A s\,d\mu = \mu_s(A). \qquad \square\end{aligned}$$

Из претходног доказа следи и да је $\mu_s = \sum_{k=1}^n c_k\mu_{E_k}$.

2.2. Интеграција позитивних функција. Ако је $f : X \to [0,+\infty]$ мерљива функција, онда ћемо са Γ_f означавати скуп свих простих позитивних функција s на X таквих да је $s(x) \leq f(x)$ за свако $x \in X$. Ако је f проста функција, онда је $\int_A f\,d\mu = \max_{s\in\Gamma_f} \int_A s\,d\mu$. Заиста, $\int_A s\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu$ за свако $s \in \Gamma_f$ на основу претходне последице 4.11, а због $f \in \Gamma_f$ добијамо и тражени закључак.

Дефиниција 4.5. *Нека је $f : X \to [0,+\infty]$ мерљива функција на X и нека је A мерљив подскуп од X. Тада дефинишемо* **интеграл функције f по подскупу A** *формулом*

$$\int_A f\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s\in\Gamma_f} \int_A s\,d\mu.$$

Претходна дискусија нам показује да је ова дефиниција природно проширује полазну дефиницију 4.4 интеграла за просте позитивне функције.

Став 4.13. ***Ако је $f : X \to [0, +\infty]$ мерљива функција на X и ако је A мерљив подскуп од X, онда је***

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu.$$

$\triangle$ Ако s припада Γ_f, онда $s\chi_A \in \Gamma_{f\chi_A}$, па је $\int_A s\,d\mu = \int_X s\chi_A f\,d\mu \le \int_X f\chi_A\,d\mu$. Узимајући супремум по свим $s \in \Gamma_f$ добијамо $\int_A f\,d\mu \le \int_X f\chi_A\,d\mu$. Обрнуто, ако $t \in \Gamma_{f\chi_A}$, онда је $0 \le t(1-\chi_E) \le f\chi_E(1-\chi_E) = 0$, тј. $t = t\chi_A \in \Gamma_f$, па је $\int_X t\,d\mu = \int_X t\chi_A\,d\mu = \int_A t\,d\mu \le \int_A f\,d\mu$. Узимајући супремум по свим $t \in \Gamma_{f\chi_A}$ добијамо $\int_X f\chi_A\,d\mu \le \int_A f\,d\mu$. $\square$

Став 4.14. [монотоност интеграла] ***Нека су $f, g : X \to [0, +\infty]$ мерљиве фукције на X и нека су A и B мерљиви подскупови од X.***

а) ***Ако је $f(x) \le g(x)$ за свако $x \in A$ онда је $\int_A f\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$.***

б) ***Ако је $A \subset B$, онда је $\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu$.***

$\triangle$ Из $f(x) \le g(x)$, $x \in A$, следи да је $f\chi_A \le g\chi_A$, па је $\Gamma_{f\chi_A} \subset \Gamma_{g\chi_A}$. Одатле, примењујући претходни став, следи

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu \le \int_X g\chi_A\,d\mu = \int_A g\,d\mu,$$

што доказује тврђење а).

Даље, $A \subset B$ повлачи $f\chi_A \le f\chi_B$, па користећи део а) добијамо

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu \le \int_X f\chi_B\,d\mu = \int_B f\,d\mu. \qquad \square$$

Став 4.15. ***Нека је $f : X \to [0, +\infty]$ мерљива функција и нека је A мерљив подскуп од X.***

а) ***Ако је $\mu(A) = 0$, онда је $\int_A f\,d\mu = 0$.***

б) ***Ако је мера скупа $B = \{x \in A : f(x) > 0\}$ строго позитивна, онда је $\int_A f\,d\mu > 0$.***

в) ***Ако је мера скупа $C = \{x \in A : f(x) = +\infty\}$ строго позитивна, онда је $\int_A f\,d\mu = +\infty$.***

$\triangle$ Ако је $\mu(A) = 0$, онда је $\int_A s\,d\mu = 0$ за сваку просту позитивну функцију s, узимајући супремум по свим $s \in \Gamma_f$ добијамо први део тврђења.

Нека је $B_n = \{x \in B : f(x) \ge 1/n\}$. Тада $B_n \uparrow B$, па зато $\mu(B_n) \to \mu(B)$. Следи да је $\mu(B_k) > 0$ за неко k, то јест $f \ge \frac{1}{k}\chi_{B_k}$. Дакле, $\int_A f\,d\mu \ge \int_A \frac{1}{k}\chi_{B_k}\,d\mu = \mu(B_k)/k > 0$, па важи б).

Из претпоставке дела в) следи да је $f \ge n\chi_C$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је $\int_A f\,d\mu \ge \int_A n\chi_C\,d\mu = n\mu(C)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Због $\mu(C) > 0$ одатле следи да је $\int_A f\,d\mu = +\infty$. $\square$

Сада прелазимо на садржајнији део теорије, где је следећа теорема једна од централних у теорији Lebesgue-овог интеграла.

Теорема 4.16. [о монотоној конвергенцији] *Нека је $f_n : X \to [0, +\infty]$ низ мерљивих функција на X такав да је $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ за свако $x \in X$ и сваки природан број n. Тада $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ постоји за свако $x \in X$, функција $f : X \to [0, +\infty]$ је мерљива и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu \qquad \text{за сваки мерљив } A \subset X.$$

Ова теорема каже да за позитивне мерљиве функције из $f_n \uparrow f$ следи $\int_A f_n \, d\mu \uparrow \int_A f \, d\mu$, то јест да је $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$.

△ Монотоност интеграла даје $\int_A f_n \, d\mu \leq \int_A f_{n+1} \, d\mu$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а како сваки монотон низ у $\overline{\mathbb{R}}$ конвергира следи да постоји $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \alpha$. За свако $x \in X$ низ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ је растући, па $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ постоји у $[0, +\infty]$; функција f је мерљива као лимес мерљивих функција f_n. Из монотоности интеграла и очите неједнакости $f_n \leq f$ следи да је $\int_A f_n \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па преласком на лимес добијамо $\alpha \leq \int_A f \, d\mu$.

Нека је $s \in \Gamma_f$ и нека је $0 < c < 1$. За свако $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо

$$A_n \overset{\text{def}}{=} A \cap (f_n - cs)^{-1}([0, +\infty]) = \{x \in A : f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Скупови A_n су мерљиви, а због монотоности низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи и $A_n \subset A_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Монотоност интеграла даје

$$\int_A f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} cs \, d\mu = c \int_{A_n} s \, d\mu. \tag{4.9}$$

Осим тога, $A_n \uparrow A$. Заиста, нека је $x \in A$. Ако је $f(x) = 0$, онда је $s(x) = 0$, па је $x \in A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а ако је $0 < f(x) \leq +\infty$, онда је $cs(x) < f(x)$, па је $x \in A_n$ за довољно велико $n \in \mathbb{N}$. На основу леме 4.12 је са $\mu_s(E) = \int_E s \, d\mu$ задата мера на $\mathfrak{M}$, па преласком на лимес у неједнакости (4.9) добијамо $\alpha \geq c \int_A s \, d\mu$. Када $c \to 1$ добијамо $\alpha \geq \int_A s \, d\mu$, с обзиром да то важи за свако $s \in \Gamma_f$ следи $\alpha \geq \int_A f \, d\mu$. □

Став 4.17. *Ако су $f, g : X \to [0, +\infty]$ мерљиве функције на X и ако је $0 \leq c < \infty$, онда је*

$$\int_A (f+g) \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A g \, d\mu \qquad \text{и} \qquad \int_A cf \, d\mu = c \int_A f \, d\mu$$

за сваки мерљив подскуп A простора X.

△ Из теореме о апроксимацији простим функцијама следи да постоје низови $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ простих позитивних функција такви да $s_n \uparrow f$ и $t_n \uparrow g$ на скупу X. Тада $s_n + t_n \uparrow f + g$ и $cs_n \uparrow cf$ на X, па из одговарајућег резултата за просте позитивне функције и теореме о монотоној конвергенцији следи

$$\int_A (f+g) \, d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A (s_n + t_n) \, d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_A s_n \, d\mu + \int_A t_n \, d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_A t_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A g \, d\mu$$

$$\text{и} \quad \int_A cf\,d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} cs_n\,d\mu = c\int_A \lim_{n\to\infty} s_n\,d\mu = c\int_A f\,d\mu. \qquad \square$$

Метод доказа је типичан за теорију мере: свести проблем на случај простих функција коришћењем неке од теорема конвергенција, у овом случају теореме о монотоној конвергенцији.

Из овог става индукцијом добијамо да је $\int_A \sum_{k=1}^n f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^n \int_A f_k\,d\mu$ за позитивне мерљиве функције f_k и све $1 \le k \le n$. Ово се преноси и на бесконачне суме.

ТЕОРЕМА 4.18. [Beppo Levi[1]-ја] ***Нека је $f_n : X \to [0,+\infty]$ низ мерљивих функција на X. Тада је, за сваки мерљив скуп A,***

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n\,d\mu.$$

$\triangle$ За свако $x \in X$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира у $[0,+\infty]$ ка $f(x)$, ако је $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$, онда $g_n \uparrow f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ на X, па је f мерљива. На основу горње примедбе и теореме о монотоној конвергенцији имамо

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n\,d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_A \sum_{k=1}^{n} f_k\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_A f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_A f_k\,d\mu. \qquad \square$$

Уколико низ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ није ни монотон ни конвергентан од помоћи може бити следећа

ЛЕМА 4.19. [Fatou[2]-а] ***Нека је $f_n : X \to [0,+\infty]$ низ мерљивих функција. Тада је, за сваки мерљив подскуп A простора X,***

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu.$$

$\triangle$ Нека је $g_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots\}$. Тада је $g_n \le f_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $g_n \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n$. Теорема о монотоној конвергенцији даје

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_A g_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu. \square$$

Пример да се овде може појавити строга неједнакост се налази у задацима.

Вежбања 4.2.

4. Нека је $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ позитивних мерљивих функција који конвергира ка f у свакој тачки простора X. Претпоставимо да је $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu < +\infty$. Доказати да је $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$ за сваки мерљив скуп $E \subset X$.

3. Интеграција комплексних функција

И даље претпостављамо да је дата мера μ на σ алгебри $\mathfrak{M}$ на скупу X. Дефинишемо

$$\mathfrak{L}^1(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : X \to \mathbb{C} : f \text{ је мерљива и } \int_X |f|\,d\mu < +\infty \right\}.$$

Дефиниција је коректна јер мерљивост функције f повлачи мерљивост функције $|f|$, па интеграл који се горе јавља има смисла.

Дефиниција 4.6. *Нека је $f = f_{\Re} + i f_{\Im} \in \mathfrak{L}^1(\mu)$, где су $f_{\Re} = \Re\mathfrak{e} \circ f$ и $f_{\Im} = \Im\mathfrak{m} \circ f$ реалне компоненте функције f, нека су $f_{\Re}^{\pm}, f_{\Im}^{\pm}$ позитивни и негативни делови тих функција и нека је A мерљив подскуп од X. Дефинишемо*

$$\int_A f\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f_{\Re}^{+}\,d\mu - \int_A f_{\Re}^{-}\,d\mu + i\int_A f_{\Im}^{+}\,d\mu - i\int_A f_{\Im}^{-}\,d\mu.$$

У тој ситуацији имамо $f_{\Re}^{\pm} \leq |f_{\Re}| \leq |f|$, па је

$$\int_A f_{\Re}^{\pm}\,d\mu \leq \int_X |f_{\Re}|\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu < +\infty$$

за сваки мерљив скуп $A \subset X$, а исто важи и за $f_{\Im}^{+}$ и $f_{\Im}^{-}$. Зато је $\int_A f\,d\mu$ коректно дефинисан комплексан број. За реалне функције u из $\mathfrak{L}^1(\mu)$ се горња дефиниција своди на $\int_A u\,d\mu = \int_A u^+\,d\mu - \int_A u^-\,d\mu$. Обзиром да претходни израз има смисла када је бар један од интеграла $\int_A u^+\,d\mu$ и $\int_A u^-\,d\mu$ коначан, дефинишемо $\int_A u\,d\mu \in [-\infty, +\infty]$ и за оне мерљиве функције $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ код којих је бар један од споменутих интеграла коначан. Нагласимо да тада и даље под **интеграбилним функцијама** сматрамо само оне које припадају $\mathfrak{L}^1(\mu)$.

Следећи став нам говори да је скуп $\mathfrak{L}^1(\mu)$ векторски простор и да је $\int_A : \mathfrak{L}^1(\mu) \to \mathbb{C} : f \mapsto \int_A f\,d\mu$ линеаран функционал на том векторском простору.

Став 4.20. [линеарност интеграла] ***Ако функције f и g припадају $\mathfrak{L}^1(\mu)$ и ако је α комплексан број, онда $f+g$ и αf припадају $\mathfrak{L}^1(\mu)$ и за сваки мерљив подскуп A од X имамо***

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu, \quad \int_A \alpha f\,d\mu = \alpha\int_A f\,d\mu.$$

Дефиниција 4.7. *Функције из $\mathfrak{L}^1(\mu)$ зовемо* **Lebesgue интеграбилним** *(на X у односу на меру μ), $\int_A f\,d\mu$ је* **Lebesgue-ов интеграл** *функције $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ на мерљивом скупу A.*

△ Функције $f+g$ и αf су мерљиве и важи $\int_X |f+g|\,d\mu \leq \int_X |f|+|g|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu + \int_X |g|\,d\mu < +\infty$ и

$\int_X |\alpha f|\, d\mu = |\alpha| \int_X |f|\, d\mu < +\infty$, па $f+g$ и αf припадају $\mathfrak{L}^1(\mu)$. Дакле, $\mathfrak{L}^1(\mu)$ је векторски простор.

Нека је $f = f_\Re + i f_\Im$, $g = g_\Re + i g_\Im$. Тада је $f+g = (f_\Re + g_\Re) + i(f_\Im + g_\Im)$ и $(f_\Re + g_\Re)^+ - (f_\Re + g_\Re)^- = f_\Re + g_\Re = f_\Re^+ - f_\Re^- + g_\Re^+ - g_\Re^-$, па је $(f_\Re + g_\Re)^+ + f_\Re^- + g_\Re^- = (f_\Re + g_\Re)^- + f_\Re^+ + g_\Re^+$. Следи да је $\int_A (f_\Re + g_\Re)^+\, d\mu + \int_A f_\Re^- + \int_A g_\Re^-\, d\mu = \int_A (f_\Re + g_\Re)^-\, d\mu + \int_A f_\Re^+\, d\mu + \int_X g_\Re^+\, d\mu$ тј.

$$\int_A (f_\Re + g_\Re)^+\, d\mu - \int_A (f_\Re + g_\Re)^-\, d\mu = \int_A f_\Re^+\, d\mu - \int_A f_\Re^-\, d\mu + \int_A g_\Re^+\, d\mu - \int_A g_\Re^-\, d\mu,$$

одакле закључујемо да важи $\int_A (f_\Re + g_\Re)\, d\mu = \int_A f_\Re\, d\mu + \int_A g_\Re\, d\mu$. Једнакост $\int_A (f_\Im + g_\Im)\, d\mu = \int_A f_\Im\, d\mu + \int_A g_\Im\, d\mu$ изводимо на исти начин, па када је помножимо са i и саберемо са претходном добијамо $\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu$.

Ако је $\alpha \geq 0$, онда је $\alpha f = \alpha f_\Re + i \alpha f_\Im$ и $(\alpha f_\Re)^\pm = \alpha f_\Re^\pm$, $(\alpha f_\Im)^\pm = \alpha f_\Im^\pm$, па из дефиниције следи да је $\int_A \alpha f\, d\mu = \alpha \int_A f\, d\mu$. Ако је $\alpha = -1$, онда је $-f = (-f_\Re)^+ - (-f_\Re)^- + i(-f_\Im)^+ - i(-f_\Im)^- = f_\Re^- - f_\Re^+ + i f_\Im^- - i f_\Im^+$, па из дефиниције интеграла следи да је $\int_A -f\, d\mu = -\int_A f\, d\mu$. На основу претходно доказаног и за све $\alpha \leq 0$ важи $\int_A \alpha f\, d\mu = \int_A -|\alpha| f\, d\mu = -|\alpha| \int_A f\, d\mu = \alpha \int_A f\, d\mu$, па је тиме друга једнакост доказана за свако реално α. За $\alpha = i$ имамо $if = -f_\Im + i f_\Re$, а како је $(-f_\Im)^\pm = f_\Im^\mp$, то из дефиниције следи да је $\int_A if\, d\mu = \int_A f_\Im^-\, d\mu - \int_A f_\Im^+\, d\mu + i \int_A f_\Re^+\, d\mu - i \int_A f_\Re^-\, d\mu = i \int_A f\, d\mu$. Коначно, у општем случају имамо $\alpha = a + ib$ за $a, b \in \mathbb{R}$, по већ доказаном је

$$\begin{aligned}\int_A \alpha f\, d\mu &= \int_A (af + ibf)\, d\mu = \int_A af\, d\mu + \int_A ibf\, d\mu = a \int_A f\, d\mu + i \int_A bf\, d\mu \\ &= a \int_A f\, d\mu + ib \int_A f\, d\mu = (a+ib) \int_A f\, d\mu = \alpha \int_A f\, d\mu. \qquad \square\end{aligned}$$

Из става индукцијом добијамо да је $\int_A \sum_{j=1}^n f_j\, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_A f_j\, d\mu$ ако су функције f_j интеграбилне.

Надаље ћемо формулисати резултате само за интеграле по читавом скупу X, а читаоцу је јасно да се они могу пренети на интеграле по мерљивом подскупу A скупа X уз помоћ једнакости $\int_A f\, d\mu = \int_X f \chi_A\, d\mu$.

Последица овог става је монотоност интеграла: ако су f и g реалне интеграбилне функције и ако је $f(x) \leq g(x)$ за свако $x \in X$, онда је $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$.

Следећи став нам говори да је линеарни функционал $\int_X : \mathfrak{L}^1(\mu) \to \mathbb{C}$ контрактиван (у ствари норма му је једнака 1).

Став 4.21. **[основна интегрална неједнакост]** *Ако је* $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ *онда је*

$$\boxed{\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu.} \tag{4.10}$$

$\triangle$ Нека је $\int_X f\,d\mu = re^{i\theta}$, где је $r \geq 0$, а θ реално. Тада је

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,d\mu\right| &= r = e^{-i\theta}\int_X f\,d\mu = \int_X e^{-i\theta} f\,d\mu \\ &= \Re\mathfrak{e}\int_X e^{-i\theta} f\,d\mu = \int_X (e^{-i\theta} f)_{\Re}\,d\mu \leq \int_X |e^{-i\theta} f|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu. \qquad \square\end{aligned}$$

Списак теорема конвергенције (о монотоној конвергенцији, Beppo Levi-јева теорема и Fatou-ова лема) завршавамо следећом теоремом.

Теорема 4.22. [Lebesgue-а о доминантној конвергенцији] ***Нека је*** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***низ комплексних мерљивих функција на*** X ***који тачка по тачка конвергира ка функцији*** $f : X \to \mathbb{C}$, ***то јест, нека за свако*** $x \in X$ ***постоји*** $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. ***Претпоставимо да постоји мерљива функција*** $g : X \to [0, +\infty]$ ***таква да је*** $\int_X g\,d\mu < +\infty$ ***и да је*** $|f_n(x)| \leq g(x)$ ***за свако*** $x \in X$ ***и свако*** $n \in \mathbb{N}$. ***Тада*** $f_n \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ ***за свако*** $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ ***и***

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f - f_n|\,d\mu = 0, \qquad \text{као и} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Функцију g зовемо **интеграбилном доминантом** низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\triangle$ Прво, из $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ и $|f_n(x)| \leq g(x)$ следи $|f(x)| \leq g(x)$. Дакле, $\int_X |f|\,d\mu \leq \int_X g d\mu < +\infty$ и $\int_X |f_n|\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu < +\infty$, па су f_n и f интеграбилне. Затим, $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2g$, па је $h_n = 2g - |f - f_n| \geq 0$. Можемо применити Fatou-ову лему на ненегативан низ $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, како је $\liminf_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 2g$ добијамо

$$\begin{aligned}\int_X 2g\,d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X h_n\,d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_X (2g - |f - f_n|)\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X 2g\,d\mu - \int_X |f - f_n|\,d\mu\right) \\ &= \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X |f - f_n|\,d\mu,\end{aligned}$$

како је $\int_X 2g\,d\mu < +\infty$ следи да је

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X |f - f_n|\,d\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int_X |f - f_n|\,d\mu \leq 0,$$

па је $\lim_{n\to\infty}\int_X |f - f_n|\,d\mu = 0$. Последња једнакост следи из

$$\left|\int_X f\,d\mu - \int_X f_n\,d\mu\right| = \left|\int_X (f - f_n)d\mu\right| \leq \int_X |f - f_n|\,d\mu \to 0 \qquad \text{кад } n \to \infty. \qquad \square$$

Вежбања 4.3.

1. Доказати да формула $\int_X f\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X g\,d\mu - \int_X h\,d\mu$ за било које две ненегативне